

Оглавление

	Введение	9
	<i>История • Цели издания • Литература • Структура книги • Обратная связь</i>	
Глава	Свободное падение тел	13
1	<i>Модель • Горизонтальное движение • Вертикальное движение • Общий случай</i>	
Глава	Вращение жидкости	21
2	<i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение и анализ уравнения • Приложения в астрономии</i>	
Глава	Закон Вебера—Фехнера	27
3	<i>Модель • Дифференциальное уравнение • Децибелы</i>	
Глава	Муравей на ленте	31
4	<i>Задача • Дифференциальное уравнение • Решение задачи • Равноускоренное удлинение</i>	
Глава	Водяные часы	35
5	<i>Модель • Круговой цилиндр • Равномерная шкала</i>	
Глава	Брахистохрона	41
6	<i>Задача • Принцип Ферма • Дифференциальное уравнение • Циклоида</i>	
Глава	Элементарные химические реакции	47
7	<i>Закон действующих масс • Реакции первого порядка • Реакции второго порядка</i>	
Глава	Реактивное движение	53
8	<i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение • Ракета Фау-2</i>	
Глава	Квадратные колеса	57
9	<i>Задача • Дифференциальное уравнение • Квадратное колесо • Зубчатая дорога • Приложения</i>	

Глава 10	Задача о четырех жуках 63 <i>Кривые погони • Задача • Дифференциальное уравнение • Решение и его анализ • Общий случай</i>
Глава 11	Охота на подводную лодку 69 <i>Задача • План решения • Дифференциальное уравнение</i>
Глава 12	Трактриса 73 <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения</i>
Глава 13	Круговая трактриса 77 <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Упрощение уравнения • Критический случай • Подкритический случай • Надкритический случай</i>
Глава 14	Задача о пловце 83 <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения • Анализ решения</i>
Глава 15	Кривая погони 87 <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения • Анализ решения</i>
Глава 16	Барометрическая формула 93 <i>Задача • Дифференциальное уравнение • Изотермический случай</i>
Глава 17	Радиоуглеродный метод 99 <i>Радиоактивный распад • Дифференциальное уравнение • Период полураспада • Радиоуглеродный метод</i>
Глава 18	Температурные волны 103 <i>Закон Ньютона—Рихмана • Переменная температура среды • Решение уравнения • Анализ решения</i>
Глава 19	Задачи на растворы 109 <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение • Анализ решения • Пример</i>
Глава 20	Модель естественного роста 113 <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение и анализ • Пример</i>
Глава 21	Модель Ферхюльста 117 <i>Модель • Решение уравнения</i>
Глава 22	Модель со сбором урожая 121 <i>Модель • Решение уравнения • Бифуркационная диаграмма</i>

Глава 23	Кошки-мышки 127 <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения • Анализ решения</i>
Глава 24	Общая трактриса 131 <i>Модель • Уравнение Риккати • Метод Эйлера</i>
Глава 25	Игра в прятки 137 <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Частный случай • Общий случай</i>
Глава 26	Табулирование функций 143 <i>Математические таблицы • Задача • Методы Рунге—Кутты • Численный эксперимент</i>
Глава 27	Свободное падение тел в жидкости 149 <i>Силы сопротивления • Модель • Решение уравнения • Анализ решения</i>
Глава 28	Свободное падение тел в воздухе 153 <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения</i>
Глава 29	Ортогональные траектории 157 <i>Ортогональные семейства кривых • Дифференциальное уравнение семейства кривых • Ортогональные кривые • Пример</i>
Глава 30	Эллиптическая система координат 163 <i>Конфокальные эллипсы • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения</i>
Глава 31	Биполярные координаты 169 <i>Биполярные системы координат • Окружности Аполлония • Ортогональные траектории</i>
Глава 32	Изогональные траектории 173 <i>Изогональные траектории • Модельная задача навигации • Дифференциальное уравнение • Локсодромы</i>
Глава 33	Каустики 177 <i>Каустики и огибающие • Модель • Дифференциальное уравнение</i>
Глава 34	Математическая вышивка 181 <i>Задача • Вышивка на круге</i>
Глава 35	Шуховская башня 185 <i>Башни Шухова • Задача • Огибающая</i>

Глава 36	Криволинейные зеркала <i>Задача • Параллельные лучи • Уравнения в полных дифференциалах • Расходящиеся лучи • Сходящиеся лучи • Приложения</i>	189
Глава 37	Линзы <i>Преломление света • Задача • Решение уравнения и его анализ • Линзы</i>	197
Глава 38	Переходная кривая <i>Кривизна плоских кривых • Кинематический смысл кривизны • Переходная кривая • Дифференциальное уравнение</i>	201
Глава 39	Клотоида <i>Задача • Система уравнений • Приближение степенными рядами</i>	205
Глава 40	Цепная линия <i>Задача • Построение дифференциального уравнения • Решение уравнения</i>	209
Глава 41	Кривая скакалки <i>Задача • Построение уравнения • Понижение порядка • Эллиптический интеграл</i>	213
Глава 42	Вторая космическая скорость <i>Гравитационные задачи • Задача • Дифференциальное уравнение • Решение • Гравитационный радиус</i>	219
Глава 43	Из пушки на луну <i>Задача • Построение уравнения • Решение уравнения • Из пушки на Луну</i>	225
Глава 44	Законы Кеплера <i>Задача одного тела • Система уравнений • Второй закон Кеплера • Первый закон Кеплера • Третий закон Кеплера</i>	229
Глава 45	Задача двух тел <i>Постановка задачи • Движение центра масс • Движение вектора смещения</i>	235
Глава 46	Задача трех тел <i>Постановка задачи • Частные случаи • Дифференциальное уравнение • Численное решение</i>	239
Глава 47	Гравитационный лифт <i>Постановка задачи • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения</i>	243

Глава 48	Пружинный маятник <i>Модель • Дифференциальное уравнение • Решение</i>	247
Глава 49	Банджи-джампинг <i>Задача • Дифференциальное уравнение • Решение</i> <i>• Анализ решения</i>	251
Глава 50	Метроном <i>Математический маятник • Дифференциальное</i> <i>уравнение • Малые колебания • Модель метронома</i>	255
Глава 51	Нелинейный маятник <i>Проблемы линейной модели • Аналитическое</i> <i>решение • Период колебаний • Фазовый портрет</i>	259
Глава 52	Таутохронная кривая <i>Задача • Дифференциальное уравнение • Решение и его</i> <i>анализ • Изохронный маятник</i>	265
Глава 53	Затухающие колебания <i>Модель • Подкритический случай • Надкритический</i> <i>случай • Критический случай • Приложения</i>	269
Глава 54	Вынужденные колебания <i>Задача • Решение • Математический резонанс</i> <i>• Примеры резонансных явлений</i>	275
Глава 55	Резонанс в электрических цепях <i>Последовательная RLC-цепь • Решение • Колебательный</i> <i>контур • Детекторный радиоприемник</i>	281
Глава 56	Осциллятор Ван дер Поля <i>Туннельный диод • Модель • Фазовый</i> <i>портрет • Автоколебания</i>	287
Глава 57	Модели Осипова—Ланчестера <i>Модель боевых действий • Модель открытого боя</i> <i>• Модель закрытого боя • Модель смешанного боя</i>	293
Глава 58	Двумерная модель Мальтуса <i>Модель • Общее решение • Устойчивость • Фазовый</i> <i>портрет</i>	299
Глава 59	Модель Лотки—Вольтерры <i>Модель • Фазовый портрет • Экспериментальные</i> <i>подтверждения</i>	305
Глава 60	Принцип Гаузе <i>Модель • Приближенное решение • Метод</i> <i>линеаризации • Фазовый портрет</i>	309

Глава 61	Моделирование эпидемий	315
	<i>Модель SIR • Приближенное решение • Фазовый портрет • Анализ</i>	
Глава 62	Системы реакций первого порядка	321
	<i>Модельная реакция • Преобразование Лапласа • Решение системы уравнений</i>	
Глава 63	Цепная полимеризация	327
	<i>Модель • Система уравнений • Решение</i>	
Глава 64	Брюсселятор	333
	<i>Колебания в химических системах • Модель • Фазовый портрет • Предельный цикл</i>	
Глава 65	Связанные маятники	339
	<i>Степени свободы • Модель • Решение • Вынужденные колебания • Сейсмостойчивость зданий</i>	
Глава 66	Геодезические линии	345
	<i>Проблема • Формальная постановка задачи • Уравнение Эйлера–Лагранжа • Геодезические на цилиндре</i>	
Глава 67	Задача Дидоны	353
	<i>Проблема • Множители Лагранжа • Тождество Бельтрами • Решение задачи Дидоны</i>	

Введение

История • Понятие дифференциального уравнения возникло практически одновременно с созданием во второй половине XVII века Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем теории дифференциального и интегрального исчисления, как естественное обобщение обычных алгебраических уравнений. В дифференциальном уравнении неизвестной является *функция*, а само уравнение должно содержать в себе хотя бы одну *производную* искомой функции.

Первоначально дифференциальные уравнения появились в физических задачах. Например, *второй закон Ньютона*, связывающий ускорение тела (т.е. производную скорости тела или вторую производную его положения) с действующей на это тело силой, автоматически превращается в дифференциальное уравнение, если рассматриваемая сила зависит либо от скорости тела, либо от его местоположения.

Другим важным источником дифференциальных уравнений на первых порах оказались геометрические задачи, в которых по известному свойству касательных к некоторой кривой требовалось найти кривую, удовлетворяющую заданному свойству. Классической задачей этого типа является *задача о трактрисе*, в которой нужно найти кривую, отрезок касательной к которой, заключенный между точкой касания и осью координат, имел бы постоянную длину.

Цели издания • На протяжении своей уже более чем трехсотлетней истории дифференциальные уравнения исправно служат для решения разнообразных практических задач и являются стандартным средством построения и анализа непрерывных математических моделей¹. Область их применения в настоящее время является чрезвычайно широкой и включает в



Исаак Ньютон



Готфрид Вильгельм Лейбниц

¹ Близким аналогом в дискретном моделировании служат *клеточные автоматы*.

себя практически все разделы современной науки — от физики, математики и даже информатики до химии, биологии и социологии.

Целью настоящего издания было собрать под одной обложкой примеры разнообразных практических задач из различных прикладных областей, решение которых связано тем или иным образом с построением, решением и анализом какого-нибудь обыкновенного² дифференциального уравнения или системы таких уравнений.

² То есть уравнения относительно функции, зависящей ровно от одной переменной.

Литература • Первую группу изданий, среди которых автором выполнялся поиск подходящих задач и моделей, образуют классические учебники по теории дифференциальных уравнений, в которых изложение теоретического материала сопровождается относительно многочисленными примерами решения прикладных задач³.

³ Первым в этом списке идет труд, написанный примерно 150 лет назад известным английским математиком и логиком Джорджем Булем. Очень познавательно сравнить структуру изложения материала в этом учебнике с современными учебниками по дифференциальным уравнениям — они чрезвычайно близки друг к другу.



Джордж Буль

1. Boole G. *A Treatise on Differential Equations*, 1859.
2. Сикорский Ю. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения: с приложениями их к некоторым техническим задачам*, 1940.
3. Tenenbaum M., Pollard H. *Ordinary differential equations: An elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences*, 1963.
4. Эльсгольц Л. Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, 1965.
5. Simmons G. *Differential Equations: With Applications and Historical Notes*, 1991.
6. Zill D. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 2013.
7. Эдвардс Ч. Г., Пенни Д. Э. *Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple*, 2016.
8. Smith C., Campbell S. *A First Course in Differential Equations, Modeling, and Simulation*, 2016.

Во второй (весьма малочисленной) группе находятся издания, посвященные исключительно применению дифференциальных уравнений к построению и анализу математических моделей, возникающих в различных областях современного естествознания. В этих работах уже рассмотрение моделей сопровождается ми-

нимальным описанием теории, достаточной для понимания работы того или иного метода решения дифференциальных уравнений.

9. Пономарев К. К. *Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач*, 1962.
10. Burghes D., Borrie M. *Modelling with differential equations*, 1981.
11. Амелькин В. В. *Дифференциальные уравнения в приложениях*, 1987.

Наконец, последняя группа, являющаяся самой многочисленной (список ниже далеко не полон), содержит учебники, монографии и научные статьи, посвященные моделированию в каких-то уже конкретных прикладных областях — механике, оптике, биологии, химии и т.д. Большинство из этих моделей, к сожалению, не имеют практически никаких шансов попасть в какой-нибудь учебник по теории дифференциальных уравнений, например, по той простой причине, что получаемые из них уравнения решаются долго и сложно либо вообще не решаются аналитически⁴.

12. Nahin P. *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*, 2007.
13. Мюррей Дж. *Математическая биология*. В 2 томах, 2009-2011.
14. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*, 2010.
15. Banerjee S. *Mathematical Modeling: Models, Analysis and Applications*, 2014.
16. Козко А.И., Чирский В. Г. *Дифференциальные уравнения и математические модели химических задач*, 2019.

⁴ — Голубчики, — сказал Фёдор Симеонович озабоченно, разобравшись в почерках. — Это же проблема Бен Бецалеля. Калиостро же доказал, что она не имеет решения.

— Мы сами знаем, что она не имеет решения, — сказал Хунта, немедленно оцетиниваясь. — Мы хотим знать, как её решать.

— Как-то странно ты рассуждаешь, Кристо... Как же искать решение, когда его нет? Бессмыслица какая-то...

— Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. Бессмыслица — искать решение, если оно и так есть. Речь идёт о том, как поступать с задачей, которая решение не имеет. Это глубоко принципиальный вопрос...

Аркадий и Борис Стругацкие
Понедельник начинается в субботу

Структура книги • Структура настоящего издания проста и прямолинейна. Каждая его глава посвящена рассмотрению ровно одной модели (задачи) или нескольких близких вариаций одной модели. Первым шагом идет формализация модели, выражающаяся в построении некоторого дифференциального уравнения или системы таких уравнений, описывающих поведение рассматриваемой модели. Затем описывается процесс решения построенного ранее уравнения.

⁵ Если читатель желает получить более строгое или более полное теоретическое обоснование используемых в настоящем издании понятий и методов, ему следует обратиться к какому-нибудь классическому учебнику по обыкновенным дифференциальным уравнениям, например из списка на стр. 10.

При этом для каждого нового метода решения приводится некоторый минимальный теоретический материал⁵, достаточный для понимания того, как этот метод устроен и как он работает. Последним шагом рассмотрения модели следует анализ полученного решения и обсуждение его свойств с точки зрения поставленной в начале главы задачи.

Каждая глава сопровождается упражнениями для самостоятельной работы для более глубокого понимания читателем рассматриваемой в главе темы.

Так как перекрестные ссылки (между главами) на формулы и рисунки в книге практически не встречаются, то в каждой главе используется своя собственная нумерация всех типов объектов — формул, рисунков, сносок и таблиц. В случае использования перекрестных ссылок указывается либо страница, либо глава, где и располагается нужный объект.

Обратная связь • Автор с благодарностью примет все конструктивные отзывы и комментарии относительно структуры и содержания настоящего издания, а также пожелания о включении в последующие переиздания каких-либо новых практических задач. Свои отзывы и пожелания просьба отправлять по следующему адресу: ersovnm@gmail.com.

ГЛАВА 1

Свободное падение тел

Модель • В качестве первой модельной задачи рассмотрим классическую динамическую задачу моделирования движения свободно падающего тела. Пусть тело массы t бросается под углом α к горизонту с начальной скоростью w_0 (рис. 1). Требуется определить, по какой траектории будет двигаться данное тело после броска. Введем систему координат: ось Ox направим вдоль поверхности Земли, ось Oy — перпендикулярно вверх. Начало координат поместим (для простоты выкладок) в точку броска, т.е. в начальный момент времени

$$x(0) = y(0) = 0.$$

В данной модели тело совершает движение в двух направлениях — в горизонтальном и в вертикальном. Разложим скорость тела на две соответствующие компоненты: $v(t)$ — горизонтальная компонента скорости, а $u(t)$ — вертикальная (рис. 2). Далее рассмотрим движение в каждом направлении по отдельности.

Горизонтальное движение • Особенностью горизонтального движения является то, что в этом случае на тело не действуют внешние силы. Единственная сила в нашей модели — это сила тяжести, но она направлена вертикально и на горизонтальное движение не влияет. Другими словами можно сказать, что на тело в горизонтальном направлении действует нулевая сила: $F = 0$. Требуется определить, как будет изменяться со временем положение тела $x(t)$ и его скорость $v(t)$, если в начальный момент времени тело располагается в точке с координатой x_0 и имеет начальную скорость v_0 (рис. 3). Попытаемся ответить на эти прос-

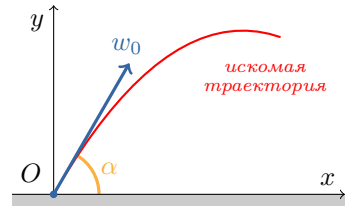


РИС. 1 Начальные условия в модели движения тела под углом к горизонту

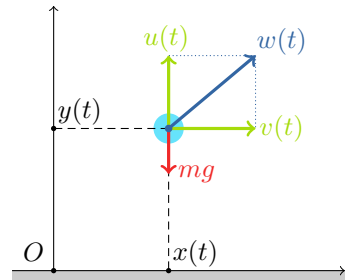


РИС. 2 Состояние модели в момент времени t

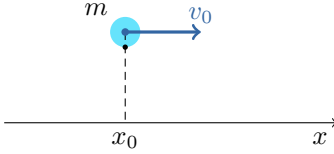


РИС. 3 Горизонтальное движение тела

тые кинематические вопросы с точки зрения дифференциальных уравнений.

Мы знаем, что физическим смыслом производной является скорость изменения одной величины относительно другой величины. Отсюда, в частности, следует, что в нашей модели скорость тела $v(t)$ будет равна производной от его положения $x(t)$ по времени t :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

По аналогичным соображениям мгновенное ускорение тела $a(t)$, т.е. скорость изменения скорости, является производной уже скорости v по времени t :

$$a(t) = \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

Согласно второму закону Ньютона мгновенное ускорение a тела пропорционально действующей на него силе F и обратно пропорционально массе m этого тела:

$$a = \frac{F}{m} \text{ или } ma = F. \quad (3)$$

Так как в нашей модели сила $F = 0$, то ускорение оказывается также нулевым: $a = 0$. Подставляя в это равенство вместо ускорения производную скорости, получим соотношение

$$\frac{dv}{dt} = 0. \quad (4)$$

Данное соотношение, несмотря на всю свою тривиальность, является самым настоящим *дифференциальным уравнением* первого порядка.

¹ Дифференциальные уравнения для функций многих переменных называются уравнениями в частных производных.

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

содержащее независимую переменную x , неизвестную функцию $y(x)$ и хотя бы одну ее производную, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*¹. *Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Наше уравнение (4) относится к классу *простейших* дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение вида $y'(x) = f(x)$, в котором правая часть не зависит от y , называется **простейшим** дифференциальным уравнением.

Решением простейшего уравнения $y' = f(x)$ является любая первообразная (неопределенный интеграл) правой части $f(x)$:

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

В нашей модели уравнение решается совсем элементарно: производная функции $x(t)$ равна нулю, значит, эта функция является постоянной:

$$v(t) = C, \quad (5)$$

где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная. Найденное нами решение демонстрирует важнейшее свойство дифференциальных уравнений: как правило, они имеют бесконечно много решений, описываемых некоторым числом произвольных постоянных (констант). Решения такого вида называются *общими*². При подстановке вместо констант каких-то конкретных значений мы будем получать *частные* решения.

Заметим, что согласно найденному решению скорость тела оказывается фиксированной и равной C . Однако чему конкретно равна эта константа C , наше дифференциальное уравнение сказать не может. Для ответа на этот вопрос нам понадобится дополнительное, так называемое *начальное*, условие: мы знаем, что начальная скорость тела равна $v(0) = v_0$.

Задача, состоящая из дифференциального уравнения и начального условия для неизвестной функции:

$$\begin{aligned} F(x, y, y') &= 0, \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

— называется **задачей Коши** для данного дифференциального уравнения³.

Подставляя начальное условие $v(0) = v_0$ в решение (5), находим, что $v_0 = C$. Окончательное решение принимает, таким образом, следующий вид:

$$v(t) = v_0. \quad (6)$$

² Обычно число констант в общем решении равно порядку дифференциального уравнения.



Огюстен Луи Коши

³ При соблюдении некоторых достаточно простых условий на функции, входящие в уравнение, задача Коши имеет *единственное* решение.

Интегральной кривой дифференциального уравнения называется график любого его частного решения. Общему решению уравнения тогда соответствует семейство интегральных кривых — по одной кривой на каждое значение параметра C . Для нашего уравнения (4) интегральными кривыми будут горизонтальные прямые линии, определяемые формулой (5), каждому значению константы C соответствует своя интегральная кривая. В совокупности данное семейство кривых заполняет всю координатную плоскость. На рис. 4 показаны несколько интегральных кривых (голубого цвета) уравнения (4) и одна интегральная кривая (красного цвета), соответствующая решению (6) задачи Коши с начальным условием $v(0) = 0.5$.

Теперь, зная закон изменения скорости $v(t)$, можно найти, как меняется расстояние x со временем. Для этого подставим найденное выражение $v(t) = v_0$ в формулу (1):

$$\frac{dx}{dt} = v_0. \quad (7)$$

Это еще одно простейшее дифференциальное уравнение, его общее решение находится непосредственным интегрированием правой части:

$$x(t) = \int v_0 dt = v_0 t + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Для данного уравнения у нас также имеется начальное условие: $x(0) = x_0$. Подставляя его в общее решение, определяем константу C : $C = x_0$, откуда находим уже решение соответствующей задачи Коши:

$$x(t) = x_0 + v_0 t. \quad (9)$$

Интегральные кривые общего решения и решения задачи Коши для $x(0) = -0.75$ показаны на рис. 5. В данном случае интегральные кривые также являются прямыми линиями, угол наклона которых определяется значением v_0 .

Вертикальное движение • Рассмотрим теперь случай движения тела массы m в вертикальном направлении в предположении, что на тело действует только сила тяжести, которая около поверхности Земли примерно равна $F = mg$, где $g \approx 9.8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения. Направим ось y вертикально



РИС. 4 Интегральные кривые $v(t)$ уравнения (4)

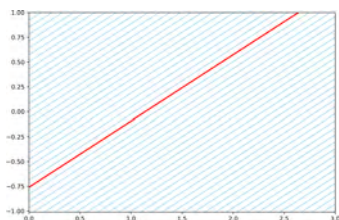


РИС. 5 Интегральные кривые $x(t)$ уравнения (7)

вверх, начало координат $y = 0$ привяжем к поверхности Земли. Обозначим скорость тела $u(t)$, т.е. согласно физическому смыслу производной

$$u(t) = \frac{dy}{dt}. \quad (10)$$

Пусть в начальный момент времени высота $y(0) = y_0$, скорость $u(0) = u_0$ (рис. 6). Заметим, что при $u_0 > 0$ начальная скорость направлена вверх (в положительном направлении оси Oy), что соответствует, например, броску тела вверх, а при $u_0 < 0$ начальная скорость направлена вниз.

Далее действуем по рассмотренной выше схеме. Записываем второй закон Ньютона для вертикального направления:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{F}{m} = -\frac{mg}{m} = -g, \quad (11)$$

сила тяжести действует против положительного направления оси Oy , поэтому она в данном уравнении записывается со знаком минус. Это простейшее дифференциальное уравнение, его общее решение:

$$u(t) = -\int g dt = -gt + C. \quad (12)$$

Из начального условия $u(0) = u_0$ определяем константу $C = u_0$, следовательно, вертикальная скорость свободно падающего тела меняется со временем по закону

$$u(t) = u_0 - gt. \quad (13)$$

Подставляем найденную скорость в (10) и получаем простейшее уравнение для неизвестной функции $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = u_0 - gt. \quad (14)$$

Общее решение этого уравнения находим также непосредственным интегрированием:

$$y(t) = \int (u_0 - gt) dt = u_0 t - \frac{gt^2}{2} + C. \quad (15)$$

Согласно начальному условию $y(0) = y_0$, поэтому константа $C = y_0$, следовательно,

$$y(t) = y_0 + u_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (16)$$

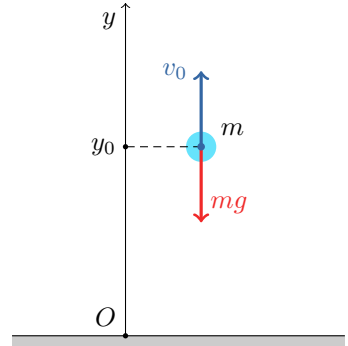


РИС. 6 Вертикальное движение тела под действием силы тяжести

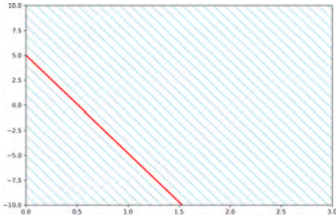


РИС. 7 Интегральные кривые уравнения (11)

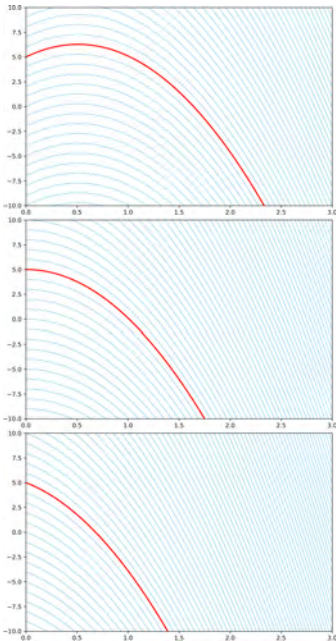


РИС. 8 Интегральные кривые уравнения (16) для трех случаев (сверху вниз): $u_0 > 0$, $u_0 = 0$ и $u_0 < 0$

Заметим, что формулы (13) и (16) определяют закон *равноускоренного* движения (с постоянным ускорением, равным $-g$).

Интегральные кривые уравнения (11) показаны на рис. 7, ими являются параллельные прямые с углом наклона к оси Ot , равным $\alpha = -\arctg g$.

На рис. 8 построены интегральные кривые уравнения (16) для трех случаев: начальный бросок вверх ($u_0 > 0$), свободное падение с нулевой начальной скоростью ($u_0 = 0$) и бросок вниз ($u_0 < 0$). Очевидно, что во всех случаях интегральные кривые являются параболой, положение вершины каждой параболы определяется значением начальной скорости u_0 .

Общий случай • Вернемся теперь к общему случаю, когда тело бросается под некоторым углом к горизонту. Заметим сначала, что горизонтальное движение тела описывается уже найденными выше формулами (6) и (9). С учетом начальных условий в данной модели

$$x_0 = 0, v_0 = w_0 \cos \alpha,$$

— получаем следующие формулы:

$$v(t) = w_0 \cos \alpha, x(t) = w_0 \cos \alpha t. \quad (17)$$

Вертикальное движение, определяемое силой тяжести, описывается второй рассмотренной выше моделью, т.е. формулами (13) и (16). Подставляя в эти формулы начальные условия

$$u(0) = w_0 \sin \alpha, y(0) = 0,$$

получаем, что

$$u(t) = w_0 \sin \alpha - gt, y(t) = w_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \quad (18)$$

Таким образом, траектория движения тела описывается системой двух уравнений:

$$\begin{aligned} x(t) &= w_0 \cos \alpha t, \\ y(t) &= w_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что мы можем исключить параметр t из системы. Для этого выразим t из первого уравнения:

$$t = \frac{x}{w_0 \cos \alpha}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение:

$$y = w_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{w_0 \cos \alpha} - \frac{g \left(\frac{x}{w_0 \cos \alpha} \right)^2}{2}.$$

После очевидных упрощений получаем явную формулу, описывающую траекторию движения тела в виде функции $y(x)$:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2w_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (20)$$

Полученная зависимость является квадратичной, следовательно, траектория полета тела оказывается параболой⁴. На рис. 9 показано несколько траекторий для разных значений угла α при фиксированной начальной скорости, а на рис. 10 — несколько траекторий для разных начальных скоростей при фиксированном угле броска $\alpha = 67^\circ$.

⁴ Фотографии, иллюстрирующие этот факт, можно найти в сети Интернет по ключевым словам *projectile motion*.

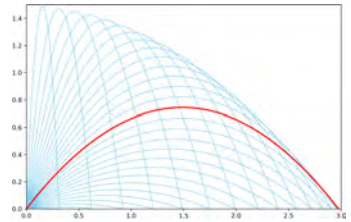


РИС. 9 Траектории полета тела для разных значений угла α , красным цветом выделен случай $\alpha = 45^\circ$

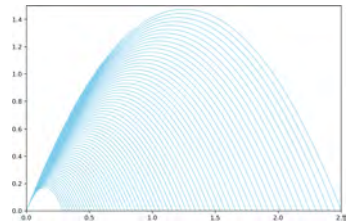


РИС. 10 Траектории полета тела для разных значений начальной скорости w_0 и угла $\alpha = 67^\circ$

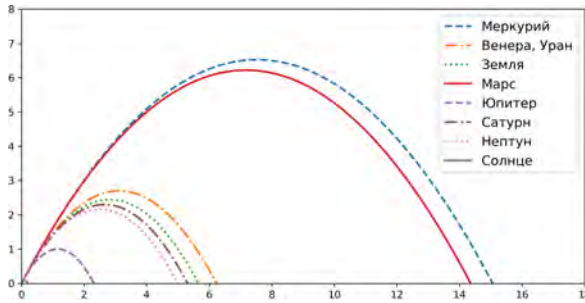


РИС. 11 Траектории полета одного и того же тела для разных небесных тел, $w_0 = 8 \text{ м/с}$, $\alpha = 60^\circ$

На рис. 11 показано, как бы двигалось тело, брошенное с одной и той же скоростью под одним и тем же углом, на разных небесных телах Солнечной системы. Различие траекторий обусловлено разными значениями ускорения свободного падения на поверхности того или иного тела, которое зависит от массы M тела и его радиуса R :

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

где $G \approx 6.67 \cdot 10^{11} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$ — гравитационная постоянная.

Стоит еще раз отметить тот факт, что параболической траектория полета тела будет только в идеальном



Жозеф Луи Лагранж

случае: постоянная сила тяжести и отсутствие сопротивления воздуха. Первое условие почти выполняется для малых высот, второе — для тяжелых небольших тел и малых скоростей. Если учесть, что сила тяжести зависит от высоты полета, то траектория согласно законам Кеплера (которые мы рассмотрим позже) окажется на самом деле *эллипсом*, в одном из фокусов которого находится центр Земли. Если же учесть сопротивление воздуха (эту модель мы также рассмотрим позже), то траектория полета станет совсем неправильной.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ

5 Для обозначения производных традиционно используются нотации Лагранжа и Лейбница:

$$y'(x) \text{ и } \frac{dy}{dx}.$$

Если независимой переменной является время t , то для обозначения производной функции $x(t)$ мы будем применять нотацию Ньютона:

$$\dot{x}(t).$$

6 Нотация Лейбница позволяет записывать дифференциальные уравнения в форме дифференциалов:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Чтобы выразить из такого уравнения производную y' , надо поделить его на dx и заменить dy/dx на y' .

1 Решите следующие дифференциальные уравнения⁵:

1) $y' = x \ln x$;

2) $y' = x \arctg x$;

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$;

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$;

5) $(x^2 + 1)dx + (x + 1)dy = 0$;

6) $x dx - (x^2 + 1)dy = 0$.

2 Найдите решение следующих задач Коши для простейших дифференциальных уравнений:

1) $x dy = dx$; $y(-e) = 2$;

2) $\cos^6 x dy = \sin^3 x dx$; $y(\pi) = 1$;

3) $y' = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$; $y(3) = 0$;

4) $y' = x \sin x$; $y(\pi) = \pi$.

3 Ответьте на следующие два «баллистических» вопроса, используя формулу (20) и условие, что начальная скорость w_0 фиксирована.

1) Каким должен быть угол α , чтобы расстояние до места падения тела было максимальным?

2) На какую максимальную высоту можно забросить тело на расстоянии l (по горизонтали) от точки броска?

ГЛАВА 2

Вращение жидкости

Модель • В сосуд, имеющий форму прямого кругового цилиндра, налита жидкость, например вода. Сосуд вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси цилиндра (рис. 1).

Требуется определить, какую форму примет поверхность жидкости, если вращение продолжается достаточно долго¹. При построении модели мы будем предполагать, что сосуд достаточно широкий и глубокий, это позволит пренебречь разными поверхностными эффектами около боковых стенок сосуда.

Дифференциальное уравнение • Очевидно, что искомая поверхность должна быть поверхностью вращения. Поэтому для нахождения ее формы достаточно рассмотреть осевое сечение нашего сосуда и найти форму соответствующей *кривой*, из которой потом мы сможем сформировать и саму поверхность.

Введем в модель систему координат, как это показано на рис. 1. Ось Oy направим по оси цилиндра, ось Ox — перпендикулярно оси Oy вдоль основания цилиндра, начало координат, таким образом, оказывается в центре основания цилиндра.

Рассмотрим малый объем ν жидкости на ее поверхности (точка P на рис. 2). Пусть его масса равна m . На этот объем действуют две силы: сила тяжести $F = mg$ и сила реакции опоры N со стороны всей остальной жидкости. Сила тяжести, как обычно, действует вертикально вниз, а реакция опоры — по нормали к нашей искомой кривой, т.е. перпендикулярно касательной к этой кривой в точке P .

Обозначим угол наклона данной касательной к оси Ox через α и разложим силу N на горизонтальную N_x

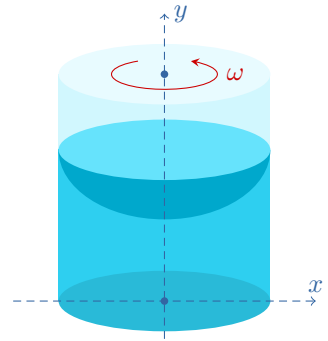


РИС. 1 Вращение сосуда с жидкостью

¹ «Достаточно долго» понимается здесь в том смысле, что вся жидкость в сосуде должна прийти в стационарное состояние относительно самого сосуда, т.е. каждый элементарный ее объем будет совершать только общее вращательное движение с заданной угловой скоростью ω .

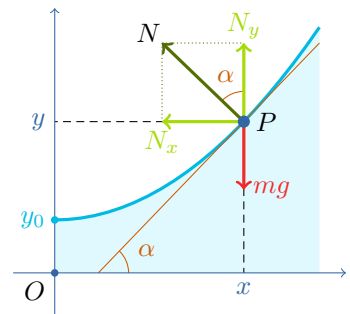


РИС. 2 Силы, действующие на малый объем жидкости ν массы m в точке $P(x, y)$

и вертикальную N_y составляющие (рис. 2):

$$N_x = N \sin \alpha, N_y = N \cos \alpha.$$

Запишем теперь 2-й закон Ньютона отдельно для каждой координаты. Вдоль вертикальной оси наш объем ν находится в состоянии равновесия, поэтому суммарная сила, действующая на него в вертикальном направлении, должна быть равна нулю:

$$N \cos \alpha - mg = 0. \quad (1)$$

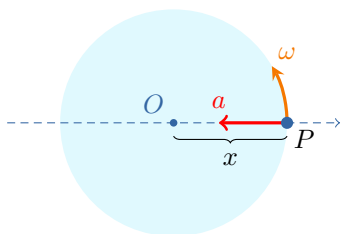


РИС. 3 Центробежное ускорение для точки P (вид на сосуд сверху)

Единственная сила, действующая на объем ν вдоль горизонтального направления, — это проекция реакции опоры N_x . Так как данный объем совершает круговое движение с радиусом вращения x , то он испытывает центробежное ускорение a , которое направлено горизонтально к оси вращения (рис. 3). Величина этого ускорения вычисляется по формуле (квадрат угловой скорости на радиус вращения):

$$a = \omega^2 x. \quad (2)$$

Таким образом, вдоль оси Ox второй закон Ньютона записывается в следующем виде:

$$-N \sin \alpha = -ma = -m\omega^2 x, \quad (3)$$

обе части взяты с отрицательным знаком, потому что и сила N_x , и ускорение a направлены против положительного направления оси Ox .

Запишем формулы (1) и (3) в виде системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} Ox : N \sin \alpha &= m\omega^2 x, \\ Oy : N \cos \alpha &= mg. \end{aligned} \quad (4)$$

Поделим первое уравнение системы на второе:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Теперь учтем тот факт, что согласно геометрическому смыслу производной функции $y(x)$ величина производной в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к соответствующей кривой $y(x)$ в заданной точке x_0 . То есть мы можем заменить $\operatorname{tg} \alpha$ на y' , что и даст нам искомое дифференциальное уравнение:

$$y' = \frac{\omega^2 x}{g}. \quad (5)$$

Если дополнительно обозначить высоту жидкости в точке $x = 0$ (на оси вращения) через y_0 , то можно поставить для полученного дифференциального уравнения задачу Коши:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\omega^2 x}{g}, \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение и анализ уравнения • Построенное нами дифференциальное уравнение (5) относится к типу простейших уравнений, т.к. его правая часть не содержит неизвестной функции $y(x)$. Следовательно, это уравнение решается непосредственным интегрированием:

$$y(x) = \int \frac{\omega^2 x}{g} dx = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C. \tag{7}$$

Учет начального условия позволяет определить константу C : $y(0) = y_0 = C$. Следовательно, решение задачи Коши (6) принимает вид:

$$y(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0. \tag{8}$$

Таким образом, искомая поверхность является поверхностью вращения параболы относительно ее оси, т.е. представляет собой *параболоид вращения* (рис. 4).

Степень вогнутости данного параболоида определяется коэффициентом при x^2 в формуле (8) — чем он больше, тем более вогнутой является поверхность. Так как ускорение свободного падения g предполагается постоянным, то единственным параметром, которым мы можем управлять для изменения степени вогнутости, оказывается угловая скорость ω . На рис. 5 показано, как меняется форма поверхности (в осевом сечении) при изменении параметра ω в предположении $y_0 = 0^2$. Напомним, что угловая скорость измеряется в радианах в секунду.

Приложения в астрономии • Тот факт, что поверхность вращающейся жидкости принимает форму параболоида, применяется, например, в астрономии при производстве параболических зеркал³.

Чтобы изготовить параболическое зеркало, используется специальная вращающаяся печь (англ. rotating

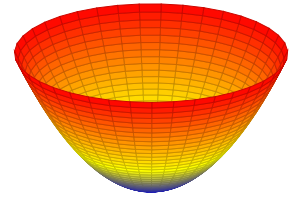


РИС. 4 Параболоид вращения

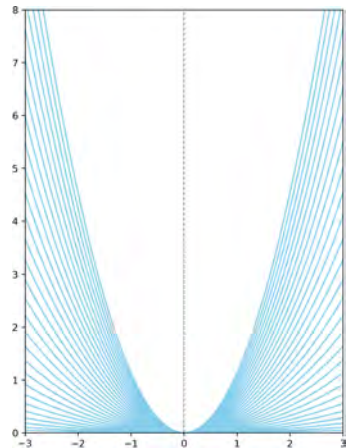


РИС. 5 Форма поверхности вращения в осевом сечении цилиндра для разных значений угловой скорости ω : от 0.1π для нижней кривой до 1.5π для верхней кривой

2 При этом необходимо заметить, что высота y_0 нижней точки нашего параболоида вращения, вообще говоря, также зависит от скорости ω (см. упражнение 2).

3 Такие зеркала используются в зеркальных телескопах (рефлекторах). Почему зеркало телескопа должно иметь форму именно параболоида, мы рассмотрим позже в отдельной модели.

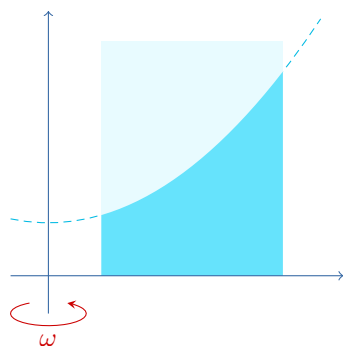


РИС. 6 Вращение со смещенной осью

furnase), в которую заливается жидкое стекло. Печь вращается с постоянной угловой скоростью, при этом температура стекла постепенно снижается до тех пор, пока оно не затвердеет. Качество полученной таким образом стеклянной заготовки далее доводят до нужного уровня уже с помощью специальных шлифовальных машин, работающих под управлением компьютера.

Заметим, что ось вращения печи не обязана совпадать с ее центром (с ее осью симметрии, если такая есть). Даже при вращении сосуда со стеклом со смещенной осью форма получаемой поверхности все равно будет параболической (рис. 6). Такой прием используется, например, при изготовлении отдельных фрагментов зеркал очень большого радиуса (рис. 7).

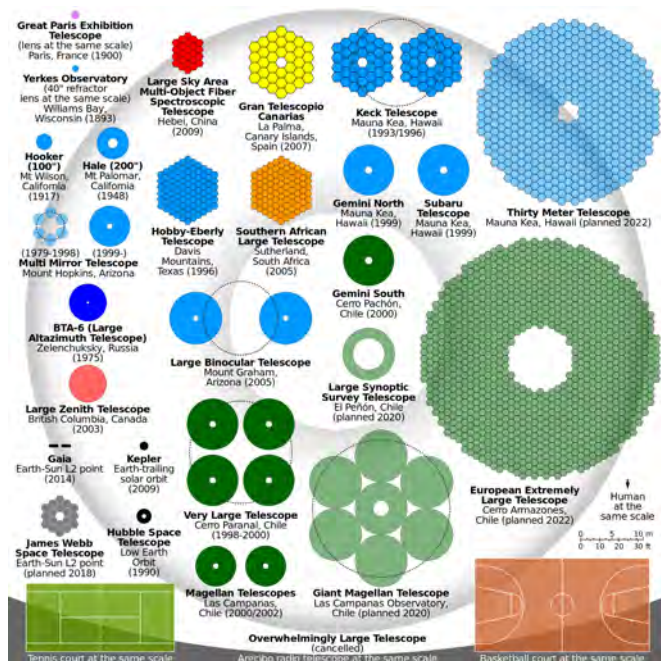


РИС. 7 Сравнение размеров зеркал различных телескопов-рефлекторов (©Cmglee, Wikimedia Commons)

Другим интересным способом получения параболических зеркал является использование в качестве вращающейся жидкости *жидких* металлов, например ртути. Идея такого телескопа была предложена еще Ньютоном, однако в то время не было технологии,

способной обеспечить вращение с постоянной угловой скоростью. Первый телескоп с ртутным зеркалом был создан в 1872 году новозеландским ученым Генри Скеем⁴. Самое большое ртутное зеркало имел телескоп Large Zenith Telescope в Канаде (рис. 8). Его диаметр составлял 6 метров, скорость вращения — 8.5 оборота в минуту.

Существенным недостатком⁵ телескопов с жидкими зеркалами является то, что они должны быть направлены строго вверх (против силы тяжести). Данный факт сильно затрудняет проведение астрономических наблюдений такого рода телескопами.



Генри Скей

⁴ Ртутный телескоп описан в главе 10 замечательной книги Вильяма Сибрука «Роберт Вуд».

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ

1 Уравнение (5) можно вывести и из других соображений. Рассмотрим малый объем (кубик) жидкости массы Δm на расстоянии x от оси вращения (рис. 9), площадь его правой и левой боковых граней равна Δs , расстояние между ними равно $\Delta x = \tilde{x} - x$. Центробежное ускорение (2) этого кубика создается разностью $F_2 - F_1$ сил давления, действующих на его боковые грани. То есть

$$\Delta m \omega^2 x = \tilde{F} - F = (\tilde{P} - P) \Delta s. \quad (9)$$

Давление жидкости P определяется расстоянием h до свободной поверхности жидкости:

$$P = \rho gh,$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения. Подставьте это соотношение в формулу (9) и выразите отношение

$$\frac{\Delta h}{\Delta x}.$$

Полученное в результате предельного перехода $\Delta x \rightarrow 0$ дифференциальное уравнение должно совпасть с уравнением (5). Убедитесь заодно, что в вертикальном направлении гидростатические силы уравниваются силой тяжести.

2 Нижнюю точку параболоида y_0 можно найти из условия равенства объемов исходной жидкости (без вращения) и вращающейся жидкости. Объем тела вращения в случае, когда вращение выполняется вокруг оси Oy , вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b x^2(y) dy, \quad (10)$$



РИС. 8 Ртутное зеркало телескопа LZT

⁵ Помимо крайней ядовитости паров ртути.

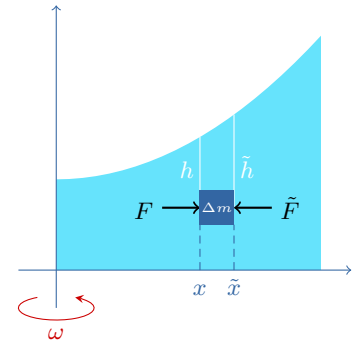


РИС. 9 Гидростатические силы, действующие на малый объем вращающейся жидкости

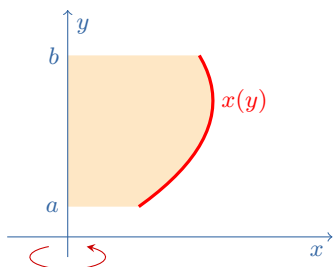


РИС. 10 Вращение кривой $x(y)$ относительно оси Oy

где функция $x(y)$ задает вращаемую кривую (рис. 10). В нашем случае согласно формуле (8):

$$x^2(y) = \frac{2g}{\omega^2}(y - y_0).$$

Пусть радиус цилиндра равен R , а высота жидкости в исходном состоянии равна h . Определите зависимость $y_0(\omega)$, воспользовавшись формулой (10) в предположении, что нижняя точка параболоида находится выше основания цилиндра $y_0 > 0$. На рис. 11 показано, как выглядит сечение одного и того же сосуда с фиксированным объемом жидкости для разных угловых скоростей ω .

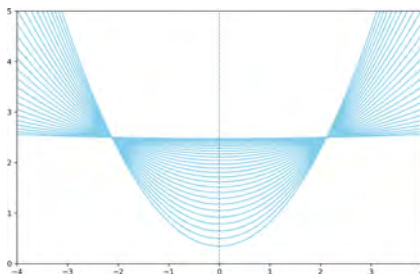


РИС. 11 Форма поверхности вращения фиксированного объема жидкости для разных угловых скоростей ω

- 3** Найдите критическое значение угловой скорости ω_0 , при которой поверхность жидкости коснется основания сосуда.
- 4** Определите зависимость $y_0(\omega)$ при условии, что скорость вращения ω будет больше критической скорости ω_0 .